

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Полупростые алгебры Ли
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: О.Г. Стырт, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 22.05.2023

Аннотация

Целью этого курса является дать изложение той части теории алгебр Ли, которое наиболее тесно связано с теорией групп Ли. В частности, мы опишем неприводимые комплексные представления разрешимых и полупростых алгебр Ли, изучим комбинаторику систем корней и групп Вейля, связанных с простыми алгебрами Ли. Классификация конечномерных представлений комплексных алгебр Ли является одним из красивейших приложений линейной алгебры и служит ключевым инструментом в очень многих областях математики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Ознакомление слушателей с основами математического анализа и линейной алгебры и подготовка к изучению других математических курсов – дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, уравнений математической физики, функционального анализа, аналитической механики, теоретической физики, методов оптимального управления и др.

Задачи дисциплины

- Приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области матричной алгебры, теории линейных пространств, интегралов и теории поля;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в применении методов в физике и других естественнонаучных дисциплинах.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок

ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- свойства определенного интеграла Римана,
- определение кратного интеграла Римана, критерий интегрируемости функции, достаточное условие интегрируемости функции, свойства интегрируемых функций, теорему о сведении кратного интеграла к повторному, физические приложения интеграла;
- основные факты и формулы теории поля (формула Грина), физический смысл формул теории поля.

уметь:

- находить численное решение системы линейных уравнений;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства;
- вычислять интеграл от функции многих переменных по множеству;
- решать прикладные физические задачи: вычислять массу тела, моменты инерции, объёмы и т.п.
- применять формулы теории поля для решения математических задач: вычисление интегралов, нахождение площадей и объёмов тел, площадей поверхностей;
- применять формулы теории поля для решения физических задач: проверка потенциальности поля, нахождение работы поля при движении материальной точки и т.п.;
- проводить вычисления с оператором набла.
- вычислять определенные интегралы и криволинейные интегралы (в частности, возникающие в геометрических и физических задачах).

владеть:

- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений
- логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений.
- навыками вычисления интегралов и навыками применения теорем теории поля в математических и физических приложениях.
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Рациональность скалярного произведения на корнях.	6	6		15
2	Камеры и системы положительных корней, биекция между ними.	6	6		15
3	Группа Вейля. Свойства: порождаемость простыми отражениями, переводимость любого корня в простой.	6	6		15
4	Схема Дынкина. Независимость от выбора системы простых корней. Ацикличность.	6	6		15
5	Схема Дынкина неразложимой системы корней: верхняя оценка общего количества ветвлений и кратных рёбер.	6	6		15
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

1. Рациональность скалярного произведения на корнях.

Системы корней в евклидовом пространстве. Классификация в двумерном случае.

2. Камеры и системы положительных корней, биекция между ними.

Системы простых корней, биекция с системами положительных корней.

3. Группа Вейля. Свойства: порождаемость простыми отражениями, переводимость любого корня в простой.

Разложение системы корней на неразложимые компоненты, согласованность с положительными и простыми корнями.

4. Схема Дынкина. Независимость от выбора системы простых корней. Ацикличность.

Функции определителей на схемах Дынкина, свойства.

5. Схема Дынкина неразложимой системы корней: верхняя оценка общего количества ветвлений и кратных рёбер.

Классификация связных схем Дынкина: «необходимость».

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Обучающемуся необходимо наличие доступа в сеть интернет, компьютер.

Преподавателю курса необходимо наличие доступа администратора курса и оборудование для проведения дистанционных семинаров (вебинаров), качественный отказоустойчивый доступ в сеть интернет.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст] : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев .— 12-е изд., испр. — М. : Физматлит, 2008, 2009 .— 312 с.
2. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 1 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 272 с.
3. Аналитическая геометрия и линейная алгебра [Текст] : в 2 ч. : учеб. пособие для вузов. Ч. 2 / А. Е. Умнов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физико-техн. ин-т (гос. ун-т) .— 2-е изд., испр. и доп. — М. : Изд-во МФТИ, 2006 .— 298 с.
4. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособ. ; рек. Уч.-метод. сов. МФТИ / В. И. Чехлов ; М-во образования РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М : МФТИ, 2000 .— 260 с.
5. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; под ред. Д. В. Беклемишева .— 2-е изд., перераб. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001 .— 496 с.

Дополнительная литература

1. Введение в алгебру [Текст] : в 3 ч. : учебник для вузов / А. И. Кострикин .— М. : МЦНМО, 2012 .— .— Ч. 1 : Основы алгебры. - 2012. - 272 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.math.mipt.ru>
<http://books.mipt.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Работа по предмету включает посещение занятий и самостоятельное решение задач.

Самостоятельная работа включает в себя: чтение и конспектирование рекомендованной литературы, просмотр интернет-ресурсов по тематике курса, решение задач, подготовку к ответам на контрольные вопросы.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	<u>4</u>
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: О.Г. Стырт, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-3 Способен осуществлять социальное взаимодействие и реализовывать свою роль в команде	УК-3.2 Взаимодействует с другими членами команды для достижения поставленной задачи
	УК-3.1 Способен устанавливать разные виды коммуникации (учебную, научную, деловую, неформальную и др.)
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Полупростые алгебры Ли» обучающийся должен:

знать:

- операции с матрицами, методы вычисления ранга матрицы и детерминантов;
- теоремы о системах линейных уравнений Кронекера-Капелли и Фредгольма, правило Крамера, общее решение системы линейных уравнений;
- основные определения и теоремы о линейных пространствах и подпространствах, о линейных отображениях линейных пространств;
- свойства определенного интеграла Римана,
- определение кратного интеграла Римана, критерий интегрируемости функции, достаточное условие интегрируемости функции, свойства интегрируемых функций, теорему о сведении кратного интеграла к повторному, физические приложения интеграла;
- основные факты и формулы теории поля (формула Грина), физический смысл формул теории поля.

уметь:

- находить численное решение системы линейных уравнений;
- оперировать с элементами и понятиями линейного пространства;
- вычислять интеграл от функции многих переменных по множеству;
- решать прикладные физические задачи: вычислять массу тела, моменты инерции, объёмы и т.п.
- применять формулы теории поля для решения математических задач: вычисление интегралов, нахождение площадей и объёмов тел, площадей поверхностей;
- применять формулы теории поля для решения физических задач: проверка потенциальности поля, нахождение работы поля при движении материальной точки и т.п.;
- проводить вычисления с оператором набла.
- вычислять определенные интегралы и криволинейные интегралы (в частности, возникающие в геометрических и физических задачах).

владеть:

- общими понятиями и определениями, связанными с матричной алгеброй;
- геометрической интерпретацией систем линейных уравнений и их решений;
- понятиями линейного пространства, матричной записью подпространств и отображений
- логическим мышлением, методами доказательств математических утверждений.
- навыками вычисления интегралов и навыками применения теорем теории поля в математических и физических приложениях.
- умением пользоваться необходимой литературой для решения задач.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Докажите, что все миноры порядка k в некоторой матрице равны 0, то миноры более высоких порядков также равны 0.
2. Докажите, что если столбцы матрицы системы линейных уравнений линейно независимы, то система имеет не более одного решения.
3. Что такое прямая сумма линейных подпространств? Докажите, что пространство всех функций, определенных на отрезке $[-a, a]$, является прямой суммой подпространства четных функций и подпространства нечетных функций.
1. Докажите, что все миноры порядка k в некоторой матрице равны 0, то миноры более высоких порядков также равны 0.
2. Докажите, что если столбцы матрицы системы линейных уравнений линейно независимы, то система имеет не более одного решения.
3. Что такое прямая сумма линейных подпространств? Докажите, что пространство всех функций, определенных на отрезке $[-a, a]$, является прямой суммой подпространства четных функций и подпространства нечетных функций.
4. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:
 - а) поменять местами i -й и j -й векторы первого базиса;
 - б) поменять местами i -й и j -й векторы второго базиса;

в) расположить векторы обоих базисов в обратном порядке?

5. Какой вид имеет матрица линейного преобразования в базисе e_1, \dots, e_n , если e_1, \dots, e_n ($k < n$) образуют базис в инвариантном подпространстве данного пространства?

6. Определенный интеграл Римана. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем.

7. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость.

8. Формула Ньютона–Лейбница.

9. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

10. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.

11. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Формула длины кривой. Условие потенциальности векторного поля.

12. Кратный интеграл Римана.

13. Мера графика функции многих переменных, мера подграфика неотрицательной функции.

14. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, монотонность интеграла, непрерывность интеграла, теорема о среднем.

15. Сведение кратного интеграла к повторному.

16. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.

17. Формула Грина.

18. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Примеры экзаменационных билетов

Билет № 1

1) Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

2) Формула Грина.

Билет № 2

1) Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

2) Формула Ньютона–Лейбница.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые были самостоятельно обнаружены и исправлены;

оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если он показал всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений, но при этом были допущены небольшие неточности, которые после указания экзаменатора были самостоятельно исправлены;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает неточности в ответе или делает несущественные ошибки при решении задач;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает небольшие ошибки в ответе и (или) при решении задач;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но отвечает неуверенно и (или) допускает ошибки при решении задач;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, если при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, неточные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, не владеющему некоторыми разделами учебной программы, но умеющему применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;

оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется обучающемуся, показавшему полное незнание учебной программы дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.